

113 學年度第二學期高三多元選修 微積分 補考(作業)

每題 10 分，共 100 分

1. 令 $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， f 是從 $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ 對應到 \mathbb{Z}^+ 的函數，定義為 $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ ，

證明 f 是一對一且映成的函數。

2. 若 $g(x) = 2x + 1$ 且 $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ ，

(1) 求一函數 $f(x)$ 使得 $f \circ g = h$

(2) 求一函數 $p(x)$ 使得 $g \circ p = h$

3. 證明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函數，並求其反函數。

4. 化簡下列函數：

(1) $\cos(\tan^{-1} x)$

(2) $\sec(2 \tan^{-1} \frac{x}{3})$

5. 求下列極限值：

(1) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^3 - 27}{t^2 - 9}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$

6. show that $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

7. 利用極限的嚴謹定義 (ε - δ 定義)，證明： $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$

8. 利用極限的嚴謹定義 (ε - δ 定義)，證明：

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$

9. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & x \geq 3 \end{cases}$ 為連續函數，求 a, b

10. 令 a, b 為正數，證明方程式 $\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$ 在 $(-1, 1)$ 上至少有一根。