單元 1

乘法公式

回憶一下

1. 和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$。
2. 差的平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$。
3. 平方差：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

1. 試利用差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，計算 $0.99^2=$ <u>0.9801</u>。

答 $0.99^2=(1-0.01)^2$

$=1^2-2\times1\times0.01+0.01^2$

$=1-0.02+0.0001$

$=0.9801$。

2. 已知兩正方形，其邊長分別為 113 公分與 13 公分，試利用平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，計算兩正方形面積相差 <u>12600</u> 平方公分。

答 大正方形面積 $=113^2$，

小正方形面積 $=13^2$，

兩正方形面積差 $=113^2-13^2$

$=(113+13)(113-13)$

$=126\times100=12600$。

3. 已知 $a>b$，且 $a+b=12$，$ab=7$，試回答下列問題：

(1) $a^2+b^2=$ <u>130</u>。

(2) $a-b=$ <u>$2\sqrt{29}$</u>。

(3) $a^2-b^2=$ <u>$24\sqrt{29}$</u>。

答 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=12^2-2\times7$

$=144-14$

$=130$。

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=130-2\times7$

$=116$。

$\Rightarrow a-b=\pm\sqrt{116}=\pm2\sqrt{29}$ （$\because a>b$ $\therefore$取正）。

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$=12\times2\sqrt{29}$

$=24\sqrt{29}$。

4. 求 $\dfrac{1987^2-2\times1987\times7+7^2}{1980^2}\times\dfrac{1994}{1987^2-7^2}=$ <u>$\dfrac{1}{1980}$</u>。

答 $\dfrac{1987^2-2\times1987\times7+7^2}{1980^2}\times\dfrac{1994}{1987^2-7^2}$

$=\dfrac{(1987-7)^2}{1980^2}\times\dfrac{1994}{(1987+7)(1987-7)}$

$=\dfrac{1980^2}{1980^2}\times\dfrac{1994}{1994\times1980}$

$=1\times\dfrac{1}{1980}$

$=\dfrac{1}{1980}$。

5. 若 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)=2^n-1$，則 $n=$ <u>512</u>。

答 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)\times\cdots\times(2^{256}+1)$

$\vdots$

$=2^{512}-1$。

$\Rightarrow n=512$。

銜接高中內容

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$。
2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$。
3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$。
4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$。

進階練習題

1. 試利用 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$，
展開 $(2x-3)^3=$ __$8x^3-36x^2+54x-27$__。

答 $(2x-3)^3=(2x)^3-3\times(2x)^2\times3+3\times(2x)\times3^2-3^3$

$=8x^3-36x^2+54x-27$。

2. 試利用 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，
因式分解 $8x^3+27y^3=$ __$(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$__。

答 $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$

$=(2x+3y)[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2]$

$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$。

3. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=5$，試求下列各值：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ __23__。(提示：將 $x+\dfrac{1}{x}=5$ 兩邊平方)

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ __110__。

(提示：利用 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 計算之)

答 (1) $(x+\dfrac{1}{x})^2=25$，

$x^2+2\times x\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=25$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=25-2\times x\times\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=25-2$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=23$。

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(x^2-x\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$

$=5\times(23-1)$

$=5\times22=110$。

4. 因式分解下列各式：

(1) $(a+b)^2-c^2=$ $\underline{(a+b+c)(a+b-c)}$ 。

(2) $16x^4-625=$ $\underline{(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)}$ 。

(3) $x^6-1=$ $\underline{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$ 。

答 (1) $(a+b)^2-c^2=[(a+b)+c][(a+b)-c]$

$=(a+b+c)(a+b-c)$。

(2) $16x^4-625=(4x^2)^2-25^2$

$=(4x^2+25)(4x^2-25)$

$=(4x^2+25)[(2x)^2-5^2]$

$=(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)$。

(3) $x^6-1=(x^3)^2-1^2$

$=(x^3-1)(x^3+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$。

5. 展開並化簡下列各式：

(1) $(3-2\sqrt{2})^3=$ $\underline{90-70\sqrt{2}}$ 。

(2) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)-(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)=$ $\underline{-19x^3-35y^3}$ 。

答 (1) $(3-2\sqrt{2})^3=3^3-3\times3^2\times2\sqrt{2}+3\times3\times(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^3$

$=27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}$

$=99-70\sqrt{2}$。

(2) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)-(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

$=[(2x)^3-(3y)^3]-[(3x)^3+(2y)^3]$

$=(8x^3-27y^3)-(27x^3+8y^3)$

$=-19x^3-35y^3$。

單元 2

因式分解

1. 因式分解：

將一個多項式 $f(x)$ 分解成數個多項式 $g_1(x)$，⋯，$g_n(x)$ 的乘積，

即 $f(x)=g_1(x)\times\cdots\times g_n(x)$。

因式分解

例如：$2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$。

展開

2. 承 1.，其中 $g_1(x)$，$g_2(x)$，⋯，$g_n(x)$ 為 $f(x)$ 之因式。

基礎練習題

1. 利用提公因式法因式分解：

(1) $(x+3)(3x+7)+(x+3)=$ $\underline{(x+3)(3x+8)}$ 。

(2) $(2x+1)(2x+3)-(3x-4)(2x+3)=$ $\underline{-(2x+3)(x-5)}$ 。

(3) $(x-3)^2+(2x+1)(3-x)=$ $\underline{-(x-3)(x+4)}$ 。

答

(1) $(x+3)(3x+7)+(x+3)$
$=(x+3)[(3x+7)+1]$
$=(x+3)(3x+7+1)$
$=(x+3)(3x+8)$。

(2) $(2x+1)(2x+3)-(3x-4)(2x+3)$
$=(2x+3)[(2x+1)-(3x-4)]$
$=(2x+3)(2x+1-3x+4)$
$=(2x+3)(-x+5)$
$=(2x+3)[-(x-5)]$
$=-(2x+3)(x-5)$。

(3) $(x-3)^2+(2x+1)(3-x)$
$=(x-3)^2+(2x+1)[-(x-3)]$
$=(x-3)^2-(2x+1)(x-3)$
$=(x-3)[(x-3)-(2x+1)]$
$=(x-3)(x-3-2x-1)$
$=(x-3)(-x-4)$
$=(x-3)[-(x+4)]$
$=-(x-3)(x+4)$。

2. 利用乘法公式因式分解：

(1) $x^2-64=$ $\underline{\ (x+8)(x-8)\ }$ 。 (提示：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$)

(2) $x^2-8x+16=$ $\underline{\ (x-4)^2\ }$ 。 (提示：$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$)

(3) $(2x+3)^2+6(2x+3)+9=$ $\underline{\ 4(x+3)^2\ }$ 。

答

(1) x^2-64
$=x^2-8^2$
$=(x+8)(x-8)$。

(2) $x^2-8x+16$
$=x^2-2\times x\times 4+4^2$
$=(x-4)^2$。

(3) $(2x+3)^2+6(2x+3)+9$
$=(2x+3)^2+2\times(2x+3)\times 3+3^2$
$=[(2x+3)+3]^2$
$=(2x+6)^2$
$=[2(x+3)]^2$
$=4(x+3)^2$。

3. 利用十字交乘法因式分解：

(1) $5x^2+8x+3=$ $\underline{\ (5x+3)(x+1)\ }$ 。

(2) $21x^2+22x-8=$ $\underline{\ (7x-2)(3x+4)\ }$ 。

(3) $(2x+1)^2-3(2x+1)-28=$ $\underline{\ 2(x-3)(2x+5)\ }$ 。

答

(1) $5x^2+8x+3$

$$\begin{array}{ccc} 5x & \times & +3 \\ x & & +1 \\ \hline 5x & + & 3x=8x \end{array}$$

$=(5x+3)(x+1)$。

(2) $21x^2+22x-8$

$$\begin{array}{ccc} 7x & \times & -2 \\ 3x & & +4 \\ \hline 28x & - & 6x=22x \end{array}$$

$=(7x-2)(3x+4)$。

(3) 令 $A=(2x+1)$，
$(2x+1)^2-3(2x+1)-28$
$=A^2-3A-28$

$$\begin{array}{ccc} A & \times & -7 \\ A & & +4 \\ \hline 4A & - & 7A=-3A \end{array}$$

$=(A-7)(A+4)$
$=[(2x+1)-7][(2x+1)+4]$
$=(2x-6)(2x+5)$
$=[2(x-3)](2x+5)=2(x-3)(2x+5)$。

4. 因式分解下列各式：

(1) $x^2-6x-ax+6a=$ $\underline{\;(x-6)(x-a)\;}$。

(2) $x^2-y^2-2x+1=$ $\underline{\;(x+y-1)(x-y-1)\;}$。

(3) $6(x+y)^2-5(x^2-y^2)-(x-y)^2=$ $\underline{\;2y(7x+5y)\;}$。

答

(1) $x^2-6x-ax+6a$

$=(x^2-6x)-(ax-6a)$

$=x(x-6)-a(x-6)$

$=(x-6)(x-a)$。

(2) x^2-y^2-2x+1

$=(x^2-2x+1)-y^2$

$=(x-1)^2-y^2$

$=(x-1+y)(x-1-y)$

$=(x+y-1)(x-y-1)$。

(3) 令 $A=x+y$，$B=x-y$，

$6(x+y)^2-5(x^2-y^2)-(x-y)^2$

$=6A^2-5AB-B^2$

$$\begin{array}{ccc} 6A & \times & +B \\ A & & -B \\ \hline \end{array}$$

$-6AB+AB=-5AB$

$=(6A+B)(A-B)$

$=[6(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)]$

$=(7x+5y)(2y)$

$=2y(7x+5y)$。

5. 因式分解 $(3x+2)(-x^6+3x^5)+(3x+2)(-2x^6+x^5)+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=$ $\underline{\;-x^5(3x-4)(2x+1)\;}$。。

【103 會考】

答

$(3x+2)(-x^6+3x^5)+(3x+2)(-2x^6+x^5)+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=(3x+2)[(-x^6+3x^5)+(-2x^6+x^5)]+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=(3x+2)[(-x^6+3x^5-2x^6+x^5)]+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=(3x+2)(-3x^6+4x^5)+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=(3x+2)[-(3x^6-4x^5)]+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=-(3x+2)(3x^6-4x^5)+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=(3x^6-4x^5)[-(3x+2)+(x+1)]$

$=x^5(3x-4)(-3x-2+x+1)$

$=x^5(3x-4)(-2x-1)$

$=-x^5(3x-4)(2x+1)$。

銜接高中內容

1. 給定 $f(x)$、$g(x)$ 與 $q(x)$ 三多項式且為非零多項式。若 $f(x)=g(x)q(x)$，此時 $g(x)$與 $q(x)$ 稱為 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 為 $g(x)$與 $q(x)$ 的倍式。
2. 因式定理：

b

進階練習題

1. 因式分解下列各式：

(1) $8x^3-27=$ $\underline{(2x-3)(4x^2+6x+9)}$ 。

(2) $(x^2+2)(x^4-2x^2+4)-(x^2+2)(x^4+2x^2+4)=$ $\underline{-4x^2(x^2+2)}$ 。 。

答

(1) $8x^3-27$

$=(2x)^3-3^3$

$=(2x-3)[(2x)^2+(2x)\cdot 3+3^2]$

$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$。

(2) $(x^2+2)(x^4-2x^2+4)-(x^2+2)(x^4+2x^2+4)$

$=(x^2+2)[(x^4-2x^2+4)-(x^4+2x^2+4)]$

$=(x^2+2)[x^4-2x^2+4-x^4-2x^2-4]$

$=(x^2+2)(-4x^2)$

$=-4x^2(x^2+2)$。

2. 因式分解下列各式：

(1) $x^4-10x^2+9=$ $\underline{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}$ 。

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-63=$ $\underline{(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)}$ 。

答

(1) x^4-10x^2+9

$x^2 \quad -9$

$x^2 \quad -1$

$-x^2-9x^2=-10x^2$

$=(x^2-9)(x^2-1)$

$=(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$。

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-63=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-63$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-63$。

令 $A=x^2+5x$，

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-63=(A+4)(A+6)-63$

$=A^2+10A+24-63$

$=A^2+10A-39$

$=(A+13)(A-3)$

$=(x^2+5x+13)(x^2+5x-3)$。

$A \quad +13$

$A \quad -3$

$-3A+13A=10A$

3. 因式分解下列各式：

(1) $x^4+7x^2+16=$ $\underline{(x^2+x+4)(x^2-x+4)}$ 。

(2) $x^4+64=$ $\underline{(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)}$ 。

答

(1) x^4+7x^2+16

$=(x^4+8x^2+16)-x^2$

$=(x^2+4)^2-x^2$

$=[(x^2+4)+x][(x^2+4)-x]$

$=(x^2+x+4)(x^2-x+4)$。

(2) x^4+64

$=(x^4+16x^2+64)-16x^2$

$=(x^2+8)^2-(4x)^2$

$=[(x^2+8)+4x][(x^2+8)-4x]$

$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$。

4. 已知 $2x+3$ 為 $8x^2+ax+9$ 的因式，求 $a=$ $\underline{18}$ 。

答

〈方法 1〉

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x+3 \\ \hline
2x+3 & 8x^2+ax+9 \\
 & 8x^2+12x \\ \hline
 & (a-12)x+9 \\
 & 6x+9 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow a-12=6$。

$\therefore\ a=18$

〈方法 2〉

令 $f(x)=8x^2+ax+9$，

根據因式定理，$f(-\frac{3}{2})=0$，

$8(-\frac{3}{2})^2+a(-\frac{3}{2})+9=0$

$\Rightarrow a=18$。

5. 設 a、b 為實數，若 x^4-3ax^2+bx+4 之其中兩因式為 $2x+2$ 與 $x-2$，

求 $a+b=$ $\underline{\frac{5}{3}}$ 。

答

令 $f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$，根據因式定理可知：

$$
\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-3a-b+4=0 \\ 16-12a+2b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=5 \\ 6a-b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=0 \end{cases}
$$
。

$\therefore\ a+b=\frac{5}{3}$

單元 3 指數律與科學記號

回憶一下

1. 設 m、n 為整數，a、b 為實數且 $ab\neq 0$，則：
   (1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。
   (2) $(a^m)^n=a^{m\times n}$。
   (3) $(a\times b)^n=a^n\times b^n$。
   (4) $a^0=1$。
   註 0^0 無意義。
2. 科學記號：將一正數表示成 $a\times 10^n$ 形式，其中 $1\leq a<10$，n 為整數。

(1) $-3^4-7^2-\dfrac{2^6}{(-2)^4}=$ $\underline{\quad -134 \quad}$。

(2) $-4^3+(-5)^0+(-2)^4=$ $\underline{\quad -47 \quad}$。

答 (1) $-3^4-7^2-\dfrac{2^6}{(-2)^4}=-81-49-\dfrac{64}{16}=-134$。
(2) $-4^3+(-5)^0+(-2)^4=-64+1+16=-47$。

2. 試求下列各值：

(1) $(-3)^3\times(-3)^2=$ $\underline{\quad -234 \quad}$。

(2) $(2^2)^3=$ $\underline{\quad 64 \quad}$。

(3) $(\dfrac{-2}{3})^4\times(\dfrac{3}{4})^4=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{16} \quad}$。

答 (1) $(-3)^3\times(-3)^2=(-3)^5=-243$。
(2) $(2^2)^3=2^6=64$。
(3) $(\dfrac{-2}{3})^4\times(\dfrac{3}{4})^4=(-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4})^4=(-\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{16}$。

3. 將下列各數以科學記號表示之：

(1) $0.0000123=$ $\underline{1.23\times10^{-5}}$ 。

(2) $12300000=$ $\underline{1.23\times10^{7}}$ 。

(3) $12300\times10^{-16}=$ $\underline{1.23\times10^{-12}}$ 。

答 (1) $0.0000123=1.23\times10^{-5}$ 。

(2) $12300000=1.23\times10^{7}$ 。

(3) $12300\times10^{-16}=1.23\times10^{4}\times10^{-16}$

$=1.23\times10^{-12}$ 。

4. 若 $a=6.7\times10^{-7}$，$b=4.5\times10^{-8}$，則：

(1) $a+b=$ $\underline{7.15\times10^{-7}}$ 。

(2) $a-b=$ $\underline{6.25\times10^{-7}}$ 。

答 (1) $a+b=6.7\times10^{-7}+4.5\times10^{-8}$

$=6.7\times10^{-7}+0.45\times10^{-7}$

$=(6.7+0.45)\times10^{-7}$

$=7.15\times10^{-7}$ 。

(2) $a-b=6.7\times10^{-7}-4.5\times10^{-8}$

$=6.7\times10^{-7}-0.45\times10^{-7}$

$=(6.7-0.45)\times10^{-7}$

$=6.25\times10^{-7}$ 。

5. 若 $a=2.6\times10^{9}$，$b=2\times10^{4}$，則：

(1) $a\times b=$ $\underline{5.2\times10^{13}}$ 。

(2) $a\div b=$ $\underline{1.3\times10^{5}}$ 。

答 (1) $a\times b=(2.6\times10^{9})\times(2\times10^{4})$

$=2.6\times2\times10^{9}\times10^{4}$

$=5.2\times10^{13}$ 。

(2) $a\div b=(2.6\times10^{9})\div(2\times10^{4})$

$=\dfrac{2.6}{2}\times\dfrac{10^{9}}{10^{4}}$

$=1.3\times10^{5}$ 。

6. 小明在網路上搜尋水資源的資料如下：「地球上水的總儲量為 1.36×10^{18} m^3，其中可供人類使用的淡水只占全部的 0.3%。」根據他搜尋到的資料，判斷可供人類使用的淡水有 $\underline{4.08\times10^{15}}$ m^3。 【103 會考】

答

$$
\begin{aligned}
1.36\times10^{18}\times0.3\% &= 1.36\times10^{18}\times0.003 \\
&= 1.36\times10^{18}\times3\times10^{-3} \\
&= 4.08\times10^{15}
\end{aligned}
$$

。

銜接高中內容

1. 設 a 為實數，$a>0$。

   若 m 為整數，n 為大於 1 之正整數，則：

   (1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 。

   (2) $a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ 。

2. 設 m、n、a、b 均為實數，且 $a>0$，$b>0$，則：

   (1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$。

   (2) $(a^m)^n=a^{m\times n}$。

   (3) $(a\times b)^n=a^n\times b^n$。

   (4) $a^0=1$。

(1) $3^{\frac{1}{2}}$。　(2) $2^{-\frac{1}{3}}$。　(3) $3^{\frac{2}{3}}$。　(4) $3^{\frac{3}{2}}$。

答

(1) $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 。

(2) $2^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 。

(3) $3^{\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9}$ 。

(4) $3^{\frac{3}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$ 。

2. 試求下列各值：

(1) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$。　(2) $\dfrac{5^{-0.3}\times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}}$ 。

答

(1) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}$ 。

(2) $\dfrac{5^{-0.3}\times 5^{-2.9}}{5^{-0.2}}=\dfrac{5^{-3.2}}{5^{-0.2}}=5^{-3}=\dfrac{1}{125}$ 。

3. (1) 已知 $a^{\frac{3}{2}}=27$，求 $a=$ ___9___ 。

(2) 已知 $8^{b}=729$，求 $4^{-b}=$ ___$\frac{1}{81}$___ 。

答 (1) $a^{\frac{3}{2}}=27$，兩邊同時取 $\frac{2}{3}$ 次方，

$(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}}$，

$a=27^{\frac{2}{3}}=(3^{3})^{\frac{2}{3}}=3^{2}=9$。

(2) $8^{b}=729\Rightarrow(2^{3})^{b}=729\Rightarrow 2^{3b}=3^{6}$，兩邊同時 $-\frac{2}{3}$ 次方，

$\Rightarrow(2^{3b})^{-\frac{2}{3}}=(3^{6})^{-\frac{2}{3}}$，$2^{-2b}=3^{-4}$，$(2^{2})^{-b}=\frac{1}{81}$，$4^{-b}=\frac{1}{81}$。

4. 若 a 為實數，且 $a>0$，且已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$，試求下列之值：

(1) $a+a^{-1}=$ ___98___ 。

(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=$ ___970___ 。

(3) $a^{2}+a^{-2}=$ ___9602___ 。

答 (1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=10$，兩邊平方，

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^{2}=100$，

$(a^{\frac{1}{2}})^{2}+2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^{2}=100$，

$a+2+a^{-1}=100$。 $\therefore a+a^{-1}=98$

(2) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^{3}+(a^{-\frac{1}{2}})^{3}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}})^{2}-a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^{2}]$

$=10\times(a^{1}-1+a^{-1})=10\times(98-1)=970$。

(3) $a^{2}+a^{-2}=(a^{1}+a^{-1})^{2}-2\times a^{1}\times a^{-1}=98^{2}-2=9604-2=9602$。

5. 試求下列各式之值：

(1) $(0.729)^{-\frac{2}{3}}(\frac{81}{25})^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{5})^{2}=$ ___$\frac{4}{5}$___ 。

(2) $(4+\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}(4-\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}=$ ___27___ 。

(3) $\sqrt{\sqrt{8}}\cdot\sqrt[8]{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=$ ___$\frac{1}{2}$___ 。

答 (1) 原式 $=(0.9^{3})^{-\frac{2}{3}}[(\frac{9}{5})^{2}]^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{5})^{2}=0.9^{-2}(\frac{9}{5})(\frac{3}{5})^{2}=(\frac{10}{3^{2}})^{2}(\frac{3^{2}}{5})(\frac{3^{2}}{5^{2}})$

$=\frac{10^{2}\times 3^{4}}{3^{4}\times 5^{3}}=\frac{2^{2}}{5}=\frac{4}{5}$。

(2) 原式 $=[(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})]^{\frac{3}{2}}=(4^{2}-\sqrt{7}^{2})^{\frac{3}{2}}=(16-7)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}=27$。

(3) 原式 $=[(2^{3})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}(2^{2})^{\frac{1}{8}}(2^{6})^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-2}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-2}=2^{-1}=\frac{1}{2}$。

單元 4 多項式的四則運算

回憶一下

1. 由數字和文字 (如 x、y、⋯) 進行加法與乘法運算所組成的式子，稱為多項式。
   註 文字符號不可出現在分母、絕對值、指數、根號中。
2. 多項式的加減運算：同類項合併。
   例如：$(4x^2+5x-2)+(-3x^2-3)$
   $=(4x^2-3x^2)+(5x)+(-2-3)$
   $=x^2+5x-5$。
   註 一般而言，沒特別說明習慣以降冪排列之。
3. 多項式的乘法運算：分配律乘開，再同類項合併。
   例如：$(3x-2)(2x+5)$。
   $=6x^2+15x-4x-10$
   $=6x^2+(15x-4x)-10$
   $=6x^2+11x-10$。

答 (1) $3A+B=3(x^2+3x-2)+(-3x^2-5x)$
$=3x^2+9x-6-3x^2-5x$
$=(3x^2-3x^2)+(9x-5x)-6$
$=4x-6$。

(2) $A\times B=(x^2+3x-2)(-3x^2-5x)$
$=-3x^4-5x^3-9x^3-15x^2+6x^2+10x$
$=-3x^4-(5x^3+9x^3)-(15x^2-6x^2)+10x$
$=-3x^4-14x^3-9x^2+10x$。

2. 展開 $(2x+1)(x-1)-(x^2+x-2)=$ $\underline{\quad x^2-2x+1 \quad}$ 。 【105 會考】

答 原式 $=2x^2-2x+x-1-x^2-x+2$

$=(2x^2-x^2)+(-2x+x-x)+(-1+2)$

$=x^2-2x+1$ 。

3. 展開 $(2x-3)(3x+4)=$ $\underline{\quad 6x^2-x-12 \quad}$ 。 【108 會考】

答 原式 $=6x^2+8x-9x-12$

$=6x^2-x-12$ 。

4. 已知 A、B 兩多項式，若 $A+B=x^2+3x+5$，$A-B=3x^2-11x-11$，則多項式

$A=$ $\underline{\quad 2x^2-4x-3 \quad}$，$B=$ $\underline{\quad -x^2+7x+8 \quad}$ 。

答 $\begin{cases} A+B=x^2+3x+5 \cdots\cdots ① \\ A-B=3x^2-11x-11 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①＋②：$2A=4x^2-8x-6 \Rightarrow A=2x^2-4x-3$ 。

①－②：$2B=-2x^2+14x+16 \Rightarrow B=-x^2+7x+8$ 。

5. $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)^2$ 之 x^4 係數＝ $\underline{\quad 35 \quad}$，$x^9$ 係數＝ $\underline{\quad 60 \quad}$，常數項＝

$\underline{\quad 1 \quad}$ 。

答 x^4 項：$1 \cdot 5x^4+2x \cdot 4x^3+3x^2 \cdot 3x^2+4x^3 \cdot 2x+5x^4 \cdot 1$

$=5x^4+8x^4+9x^4+8x^4+5x^4$

$=35x^4$ 。

x^9 項：$5x^4 \cdot 6x^5+6x^5 \cdot 5x^4$

$=30x^9+30x^9$

$=60x^9$ 。

常數項＝$1\times1=1$ 。

銜接高中內容

1. 一個 x 的多項式常寫成 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 a_n、a_{n-1}、⋯、a_1、a_0 均為常數。
2. 除法原理：已知 $f(x)$、$g(x)$ 為兩個多項式，且 $g(x)\neq 0$。
   若 $f(x)\div g(x)$ 得商式為 $q(x)$，餘式為 $r(x)$，則可得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg[r(x)]<\deg[g(x)]$。

1. 設 $f(x)=3x^5+4x^2-3x-2$、$g(x)=x^2-2$，試求：

   (1) $f(x)+3g(x)=$ __$3x^5+7x^2-3x-8$__。

   (2) $2f(x)-(x+1)g(x)=$ __$6x^5-3x^3+7x^2-4x-2$__。

   (3) $f(x)\div g(x)$之商式＝__$3x^3+6x+4$__，餘式＝__$9x+6$__。

答 (1) $f(x)+3g(x)=(3x^5+4x^2-3x-2)+3(x^2-2)$

$=3x^5+4x^2-3x-2+3x^2-6$

$=3x^5+7x^2-3x-8$。

(2) $2f(x)-(x+1)g(x)=2(3x^5+4x^2-3x-2)-(x+1)(x^2-2)$

$=(6x^5+8x^2-6x-4)-(x^3-2x+x^2-2)$

$=6x^5+8x^2-6x-4-x^3+2x-x^2+2$

$=6x^5-x^3+7x^2-4x-2$。

(3)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3+0x^2+6x+4 \\
\hline
x^2+0x-2 & 3x^5+0x^4+0x^3+4x^2-3x-2 \\
 & 3x^5+0x^4-6x^3 \\
\hline
 & 0x^4+6x^3+4x^2 \\
 & 0x^4+0x^3+0x^2 \\
\hline
 & 6x^3+4x^2-3x \\
 & 6x^3+0x^2-12x \\
\hline
 & 4x^2+9x-2 \\
 & 4x^2+0x-8 \\
\hline
 & 9x+6
\end{array}
$$

商式$=3x^3+6x+4$，餘式$=9x+6$。

2. 設 $f(x)=4x^3-3x+4$、$g(x)=x^2+x-1$，求 $f(x)\div g(x)$ 之商式 $q(x)=$ __$4x-4$__，餘式 $r(x)=$ __$5x$__。

答

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x-4\leftarrow q(x) \\
\hline
x^2+x-1 & 4x^3+0x^2-3x+4 \\
 & 4x^3+4x^2-4x \\
\hline
 & -4x^2+x+4 \\
 & -4x^2-4x+4 \\
\hline
 & +5x+0\leftarrow r(x)
\end{array}
$$

3. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x-5$ 得商式為 $2x+3$，餘式為 5，則此多項式 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 所得之商式＝ $\underline{\quad x-3 \quad}$ ，餘式＝ $\underline{\quad -13 \quad}$ 。

答 $f(x)=(x-5)(2x+3)+5$

$=2x^2+3x-10x-15+5$

$=2x^2-7x-10$。

$$\begin{array}{r} x-3 \\ 2x-1\overline{)\,2x^2-7x-10} \\ \underline{2x^2-x} \\ -6x-10 \\ \underline{-6x+3} \\ -13 \end{array}$$

4. 已知 $f(x)$ 除以 $ax+b$ 的商式 $q(x)$，餘式 $r(x)$，試回答下列問題：

(1) 若 $f(x)$ 除以 $(x+\frac{b}{a})$，則商式＝ $\underline{\quad aq(x) \quad}$ ，餘式＝ $\underline{\quad r(x) \quad}$ 。

(2) 若 $cf(x)$ 除以 $ax+b$，則商式＝ $\underline{\quad cq(x) \quad}$ ，餘式＝ $\underline{\quad cr(x) \quad}$ 。

(3) 若 $f(\frac{x}{a})$ 除以 $x+b$，則商式＝ $\underline{\quad q(\frac{x}{a}) \quad}$ ，餘式＝ $\underline{\quad r(\frac{x}{a}) \quad}$ 。

答 已知 $f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)$。

(1) $f(x)=a(x+\frac{b}{a})q(x)+r(x)$

$=(x+\frac{b}{a})[aq(x)]+r(x)$。

(2) $f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)$

$\Rightarrow cf(x)=c(ax+b)q(x)+cr(x)$

$\Rightarrow cf(x)=(ax+b)[cq(x)]+cr(x)$。

(3) $f(x)=(ax+b)q(x)+r(x)$

$\Rightarrow f(\frac{x}{a})=(x+b)[q(\frac{x}{a})]+r(\frac{x}{a})$。

5. 設有兩多項式 $f(x)$、$g(x)$，且 $\deg[f(x)]=m$，$\deg[g(x)]=n$，$m>n$，則：

(1) $\deg[f(x)+g(x)]=$ $\underline{\quad m \quad}$ 。

(2) $\deg[f(x)-g(x)]=$ $\underline{\quad m \quad}$ 。

(3) $\deg[f(x)\cdot g(x)]=$ $\underline{\quad m+n \quad}$ 。

答 令 $f(x)=x^m$，$g(x)=x^n$，$m>n$，

(1) $f(x)+g(x)=x^m+x^n \Rightarrow \deg[f(x)+g(x)]=m$。

(2) $f(x)-g(x)=x^m-x^n \Rightarrow \deg[f(x)-g(x)]=m$。

(3) $f(x)\cdot g(x)=x^{m+n} \Rightarrow \deg[f(x)\cdot g(x)]=m+n$。

單元 5 不等式

3. 若 $a>b$，則

(1) $c>0$，$\begin{cases} a+c>b+c \\ a-c>b-c \\ ac>bc \\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{cases}$。

(2) $c<0$，$\begin{cases} a+c>b+c \\ a-c>b-c \\ ac<bc \\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \end{cases}$。

4. (1) 若 $0<a<b$，則 $a^2<b^2$。

(2) 若 $a<b<0$，則 $a^2>b^2$。

(3) 若 $a<b$，則 a^2，b^2 無法比較。

基礎練習題

答

$-1\le x\le 2$

$\Rightarrow -3\le 3x\le 6$

$\Rightarrow -4\le 3x-1\le 5$

$\Rightarrow -2\le \dfrac{1}{2}(3x-1)\le \dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow -2\le p\le \dfrac{5}{2}$。

2. 若$-2<a<3$，$-1<b<4$，則下列範圍為何？

(1) $2a-3b$。

(2) a^2+b^2。

(3) ab。

(提示：利用加法喔！)

答

(1) $-2<a<3 \Rightarrow -4<2a<6$ …………①

$-1<b<4 \Rightarrow 3>-3b>-12 \Rightarrow -12<-3b<3$ …………②

①＋②得$-16<2a-3b<9$。

(2) $-2<a<3 \Rightarrow 0<a^2<9$ …………③

$-1<b<4 \Rightarrow 0<b^2<16$ …………④

③＋④得 $0<a^2+b^2<25$。

(3)

a \ b	-1	4
-2	2	-8
3	-3	12

ab 之值如上表，故$-8<ab<12$。

3. 解下列一元一次不等式：

(1) $4x+1\leq 4+x$。

(2) $5(2x+3)-2x<7(x+5)$。

答

(1) $4x+1\leq 4+x$

$\Rightarrow 4x-x\leq 4-1$

$\Rightarrow 3x\leq 3$

$\Rightarrow x\leq 1$。

(2) $5(2x+3)-2x<7(x+5)$

$\Rightarrow 10x+15-2x<7x+35$

$\Rightarrow 8x+15<7x+35$

$\Rightarrow 8x-7x<35-15$

$\Rightarrow x<20$。

4. 解不等式 $\dfrac{4x-1}{3}<\dfrac{3x+2}{2}-\dfrac{1}{3}$。

答 $\dfrac{4x-1}{3}<\dfrac{3x+2}{2}-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 2(4x-1)<3(3x+2)-2$

$\Rightarrow 8x-2<9x+6-2$

$\Rightarrow 8x-2<9x+4$

$\Rightarrow -2-4<9x-8x$

$\Rightarrow -6<x$。

5. 已知 a 為實數，且 $a<0$，則 $3ax<5a$ 之解為 $\underline{\quad x>\dfrac{5}{3}\quad}$

答 $3ax<5a$，同除以 $3a$，但 $a<0$，故 $x>\dfrac{5}{3}$。

6. 老師有橘子若干顆，要分給若干個學生。若每人分 3 顆，則剩下 8 顆；若每人分 5 顆，則最後一位同學，有拿到橘子，但未達 5 顆，試問老師有橘子多少顆？學生人數共有多少人？

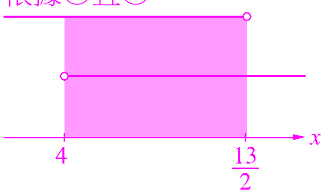
答 設學生有 x 人，則橘子共有 $(3x+8)$ 顆。

$5(x-1)<3x+8<5x \Rightarrow 5x-5<3x+8<5x$。

① $5x-5<3x+8 \Rightarrow 2x<13 \Rightarrow x<\dfrac{13}{2}$。

② $3x+8<5x \Rightarrow 8<2x \Rightarrow x>4$。

根據①且②，



$\Rightarrow 4<x<\dfrac{13}{2}$

$\Rightarrow x$ 可能為 5 或 6。

若 $x=5$，則學生共有 5 人，橘子有 23 顆。

若 $x=6$，則學生共有 6 人，橘子有 26 顆。

銜接高中內容

解二次不等式，讓我們舉例說明：

$x^2-2x-3<0$，

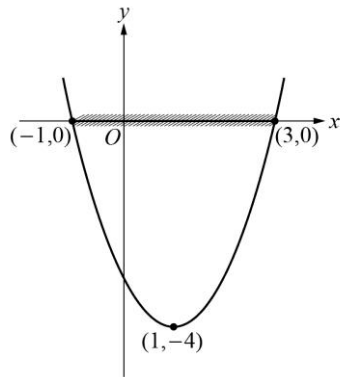
① 觀察 $y=f(x)=x^2-2x-3$ 的圖形。

利用配方法可得 $y=x^2-2x-3=(x^2-2x+1)-3-1=(x-1)^2-4$。

② 求出 $y=f(x)=x^2-2x-3$ 與 x 軸之交點。

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$。

統整上述①②，即可畫出右邊圖形，



觀察後可發現：

(1) 若 $-1<a<3$，則 $f(a)<0$。(x 軸下方)

(2) 若 $a>3$ 或 $a<-1$，則 $f(a)>0$。(x 軸上方)

(3) 若 $a=3$ 或 $a=-1$，則 $f(a)=0$。

進階練習題

1. 解下列二次不等式：

(1) $x^2+x-2<0$。

(2) $-x^2-x+2<0$。

答

(1) $y=f(x)=x^2-x-2$

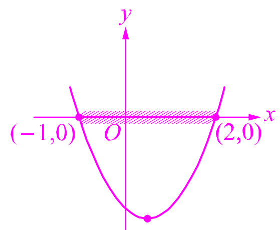
$=(x-2)(x+1)$。

已知 $y=x^2-x-2$ 為二次函數，

且 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如右圖。

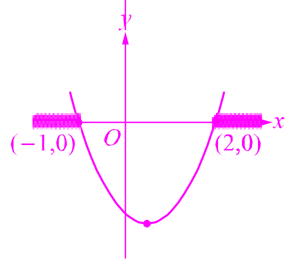
故 $-1<x<2$。



(2) $-x^2-x+2<0 \Rightarrow x^2+x-2>0$，

由(1)可知，如右圖。

故 $x>2$ 或 $x<-1$。



2. 解不等式 $2x^2+2x-3<0$。

答

$y=f(x)=2x^2+2x-3$，

判別式 $D=4-4\times2\times(-3)$

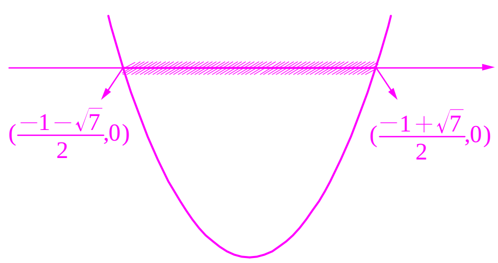
$=4+24=28$。

利用公式解可得 $x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 或 $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}$，

因為 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如右圖，

故 $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$。



3. 解不等式 $2x^2-2x-1>0$。

答

$y=f(x)=2x^2-2x-1$，

判別式 $D=(-2)^2-4\times2\times(-1)$

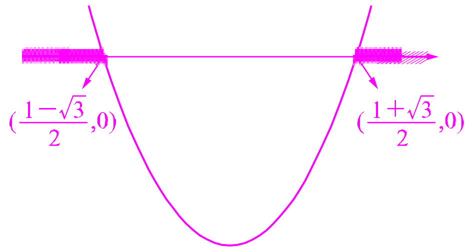
$=4+8=12$。

利用公式解可得 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，

因為 x^2 項係數為正，

所以開口向上，如右圖，

故 $x<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x>\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$。



4. 解不等式 $x^2+6x+9>0$。

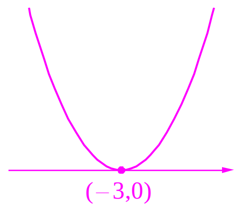
答

$y=f(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2$。

如右圖可知，

除了 $x=-3$ 以外，$f(x)>0$，

故 $x<-3$ 或 $x>-3$。



5. 解不等式 $x^2-x+3>0$。

答

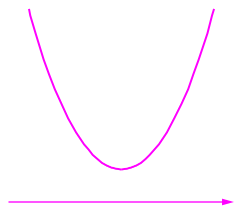
$y=f(x)=x^2-x+3$，

判別式 $D=(-1)^2-4\times1\times3=-11<0$。

由判別式 $D<0$ 可知，

該圖形與 x 軸沒有交點，如右圖，

故解為「全體實數」。



單元 6 二次函數

5. 若 $a\neq 0$，且 a、b、c 為實數，$y=ax^2+bx+c$ 稱為二次函數，其圖形為拋物線。

6. 利用配方法：

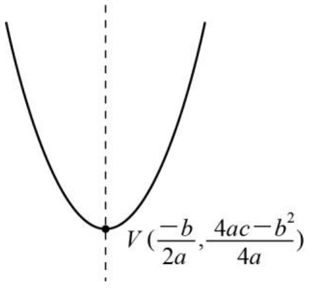
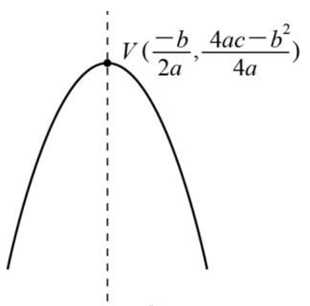
$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}
$$
。

(1) 頂點坐標 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。

(2) 對稱軸：$x=-\dfrac{b}{2a}$。

(3) 開口方向：若 $a>0$，則開口向上；若 $a<0$，則開口向下。

(4) 開口大小：若 $|a|$ 愈大，開口愈小；若 $|a|$ 愈小，開口愈大。

<table>
<tr><th>$a>0$</th><th>$a<0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>頂點為此函數之最低點
⇒ 當 $x=\dfrac{-b}{2a}$ 時，
$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$</td><td>頂點為此函數之最高點
⇒ 當 $x=\dfrac{-b}{2a}$ 時，
$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$</td></tr>
</table>

基礎練習題

1. 二次函數 $y=2x^2+12x+22$ 之頂點 $(-3,4)$，對稱軸 $x=-3$，
當 $x=$ -3，y 有最 小 值為 4。

答

$y=2x^2+12x+22$
$=2(x^2+6x+9)+22-18$
$=2(x+3)^2+4$。
頂點為$(-3,4)$，對稱軸為 $x=-3$。
因 x^2 項係數為正，故當 $x=-3$ 時，y 有最小值為 4。

2. 將二次函數 $y=ax^2-6x+2$ 向左平移 3 個單位長，再向上平移 5 個單位長後，會與 $y=-x^2+bx+c$ 的圖形重合，則 $b-c=$ 8。

答

因為 $y=-x^2+bx+c$ 與 $y=ax^2-6x+2$ 兩圖形相同，所以可知 $a=-1$。
$y=-x^2-6x+2=-(x+3)^2+11$，
由方程式可知原頂點 $(-3,11)$，

$$\Big\downarrow \text{向左 3，向上 5 平移}$$

新頂點 $(-6,16)$，
可知新方程式為 $y=-(x+6)^2+16$
$=-(x^2+12x+36)+16$
$=-x^2-12x-20$。
故 $b=-12$，$c=-20 \Rightarrow b-c=-12-(-20)=8$。

3. 若二次函數之對稱軸 $x=1$，且通過 $(-1,6)$，$(2,3)$，
則此二次函數為 $y=(x-1)^2+2$。

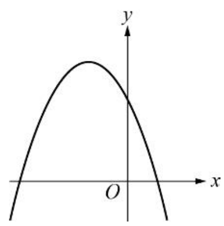
答

設頂點為 $(1,k)$，則二次函數為 $y=a(x-1)^2+k$，
將 $(-1,6)$，$(2,3)$ 代入，

$$\begin{cases} 6=a(-1-1)^2+k \\ 3=a(2-1)^2+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=4a+k \\ 3=a+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=2 \end{cases},$$

故二次函數為 $y=(x-1)^2+2$。

4. 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如右，則



(1) a__<__0。

(2) b__<__0。

(3) c__>__0。

(4) b^2-4ac__>__0。

(提示)

係數	判斷法則
a	開口方向：開口向上 $\Rightarrow a>0$；開口向下 $\Rightarrow a<0$。
b	利用對稱軸 $x=\dfrac{-b}{2a}$ 的正負號。
c	與 y 軸交點坐標為 $(0,c)$。
b^2-4ac	與 x 軸的交點個數： 若兩個交點，則 $b^2-4ac>0$。 若一個交點(重根)，則 $b^2-4ac=0$。 若沒有交點，則 $b^2-4ac<0$。

答

(1) 開口向下：$a<0$。

(2) $\dfrac{-b}{2a}<0$，且 $a<0 \Rightarrow b<0$。

(3) 與 y 軸交點 $(0,c)$，在 x 軸上方，故 $c>0$。

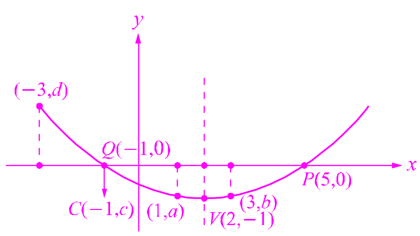
(4) 與 x 軸有兩個交點，故 $b^2-4ac>0$。

5. 坐標平面上，某二次函數的頂點為 $(2,-1)$，此函數圖形與 x 軸相交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=6$。若此函數通過 $(1,a)$、$(3,b)$、$(-1,c)$、$(-3,d)$四點，則 a、b、c、d 之值何者為正？【105 會考】

答

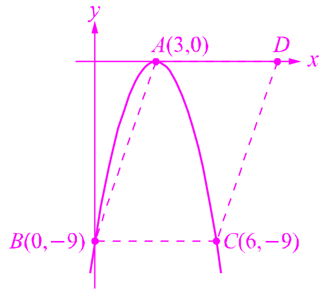
由頂點 $(2,-1)$，$\overline{PQ}=6$ 可大致畫出如右圖，

由圖形可知，$d>0$。



6. 坐標平面上，二次函數 $y=-x^2+6x-9$ 的圖形的頂點為 A，且此函數圖形與 y 軸交於 B 點。若在此函數圖形上取一點 C，在 x 軸上取一點 D，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，則 D 點坐標為何？【104 會考】

答 $y=-x^2+6x-9=-(x-3)^2$，
則頂點 $A(3,0)$。
與 y 軸交於 B 點，令 $x=0\Rightarrow y=-9$，
則 $B(0,-9)$。
且 D 點在 x 軸，故可得平行四邊形圖形，如右圖，
利用對稱性質可知，$C(6,-9)\Rightarrow D(9,0)$。



7. 已知坐標平面上有一直線 L，其方程式為 $y+2=0$，且 L 與二次函數 $y=3x^2+a$ 的圖形相交於 A、B 兩點；與二次函數 $y=-2x^2+b$ 的圖形相交於 C、D 兩點，其中 a、b 為整數。若 $\overline{AB}=2$，$\overline{CD}=4$，則 $a+b=$__1__。【107 會考】

答 $\begin{cases} y=3x^2+a \\ y=-2 \end{cases}\Rightarrow -2=3x^2+a$，$x^2=\dfrac{-2-a}{3}$，$x=\pm\sqrt{\dfrac{-2-a}{3}}$。

則 A、B 兩點坐標分別為 $\left(\sqrt{\dfrac{-2-a}{3}},-2\right)$，$\left(-\sqrt{\dfrac{-2-a}{3}},-2\right)$。

$\overline{AB}=2\sqrt{\dfrac{-2-a}{3}}=2\Rightarrow\dfrac{-2-a}{3}=1\Rightarrow a=-5$。

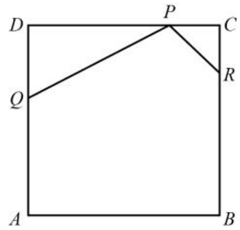
$\begin{cases} y=-2x^2+b \\ y=-2 \end{cases}\Rightarrow -2x^2+b=-2$，$x=\pm\sqrt{\dfrac{2+b}{2}}$。

則 C、D 兩點坐標分別為 $\left(\sqrt{\dfrac{2+b}{2}},-2\right)$，$\left(-\sqrt{\dfrac{2+b}{2}},-2\right)$。

$\overline{CD}=2\sqrt{\dfrac{2+b}{2}}=4\Rightarrow\dfrac{2+b}{2}=4\Rightarrow b=6$。

故 $a+b=-5+6=1$。

8. 如右圖，正方形 $ABCD$ 是一張邊長為 12 公分的皮革。皮雕師傅想在此皮革兩相鄰的角落分別切下△PDQ 與△PCR 後得到一個五邊形 $PQABR$，其中 $\overline{PD}=2\overline{DQ}$，$\overline{PC}=\overline{RC}$，且 P、Q、R 三點分別在 $\overline{CD}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 上，如右圖所示。



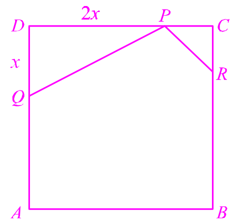
(1) 當皮雕師傅切下△PDQ 時，若 $\overline{DQ}$ 長度為 x 公分，請以 x 表示此時△PDQ 的面積。

(2) 承(1)，當 x 的值為多少時，五邊形 $PQABR$ 的面積最大？ 【105 會考】

答

(1) △PDQ 面積 $=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2$。

(2) 由(1)知，$\overline{PC}=12-2x$，且已知 $\overline{PC}=\overline{CR}$，



$\because$ △PCR 面積 $=\frac{1}{2}(12-2x)^2$

五邊形 $PQABR$ 面積

$=$ 正方形 $ABCD$ 面積 $-$ △PDQ 面積 $-$ △PCR 面積

$=144-x^2-\frac{1}{2}(12-2x)^2$

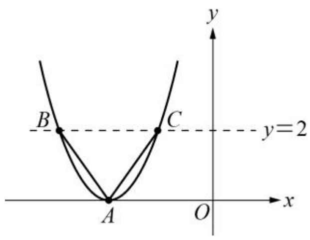
$=144-x^2-72+24x-2x^2$

$=-3x^2+24x+72$

$=-3(x-4)^2+120$。

故當 x 值為 4 時，五邊形 $PQABR$ 面積有最大值 120 平方公分。

9. 如右圖，坐標平面上有一頂點為 A 的拋物線，此拋物線與方程式 $y=2$ 的圖形交於 B、C 兩點，且△ABC 為正三角形。若 A 點坐標為 $(-3,0)$，則此拋物線與 y 軸的交點坐標為何？ 【108 會考】



答

設二次函數 $y=a(x+3)^2$，

且已知△ABC 為正三角形，令其邊長為 b，

則高 $=\frac{\sqrt{3}}{2}b=2\Rightarrow b=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，故 $C\left(-3+\frac{2}{3}\sqrt{3},2\right)$。

將 $C\left(-3+\frac{2}{3}\sqrt{3},2\right)$ 代入 $y=a(x+3)^2$，

得 $2=a\left(-3+\frac{2}{3}\sqrt{3}+3\right)^2$，$a=\frac{3}{2}$。

因此二次函數為 $y=\frac{3}{2}(x+3)^2$，令 $x=0$，則 $y=\frac{3}{2}\times 9=\frac{27}{2}$。

故與 y 軸交點坐標為 $\left(0,\frac{27}{2}\right)$。

10. 已知二次函數 $y=-x^2+4x+9$，求在下列 x 範圍中的最大值與最小值。

(1) $0\le x\le 5$

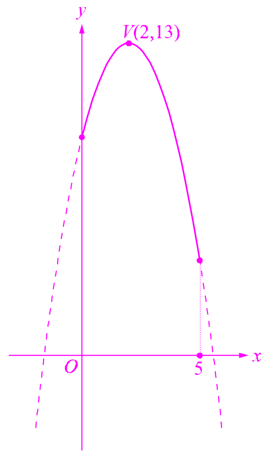
(2) $3\le x\le 6$

答 (1) $y=-x^2+4x+9=-(x-2)^2+13$。

如右圖，圖形為實線部分。

可知最大值 $=f(2)=13$，

最小值 $=f(5)=4$。



(2) 如右圖，圖形為實線部分。

可知最大值 $=f(3)=12$，

最小值 $=f(6)=-3$。